

## 二等辺三角形の底角の性質の理解を深める授業の考察

### ー 作図を基にした学習活動に着目して ー

教科教育高度化分野(15220915) 小林 邦 弘

中学校第2学年数学の二等辺三角形の性質に関わる学習について、先行研究及び筆者の実践をもとに考察した。その結果、生徒自身が作図した図形を基にして考えることによって、生徒は仮定を実感しながら証明を進めることが可能であることを明らかにした。特に二等辺三角形の底角の性質にとどまらず、数学における「逆」の理解も深まりうるということがわかった。また、作図したことで生じる結論の視覚化という問題点も少なからず解消されることがわかった。

[キーワード] 二等辺三角形, 作図, 逆

### 1 問題の所在と目的

#### (1) 問題の所在及び研究の背景

現行の学習指導要領(文部科学省, 2008)では図形指導の意義について、図形概念形成と性質の理解と論理的な思考力の育成についての2つの視点から述べられている。特に「図形に関する内容が、演繹的な推論に適した素材」(学習指導要領解説, p. 41)と示されるように、論理的な思考力の育成については図形領域とりわけ第2学年の内容が適していると考えられる。また論理的な思考力と合わせて論理的に表現する能力を伸ばすことについても述べられており、これらを踏まえて筆者は教科書を参考にしながら扱う題材や学習活動を検討して授業を行ってきた。しかし具体的な操作や直観的な見方に対して、根拠を示しながら数学的な表現を用いて他者に伝えることに生徒の抵抗感も大きくなりがちである。さらには証明の書き方に生徒の意識が向きがちとなり、図形概念や性質の理解がなおざりなまま授業が進むこともあった。

その具体例として、第2学年の「二等辺三角形の性質」を考察する学習が挙げられる。ある三角形が二等辺三角形であると分かっている際に見出される様々な特徴について考察することと、その逆に、ある三角形にどのような条件が成り立てば二等辺三角形といえるかを考察する内容である。2つの学習内容は与えられる前提条件(仮定)と最終的に論じること(結論)が入れ替わった見方であるが、生徒が仮定と結論を混同して考え、証明が正しく行えなかったり、そもそも何を明らかにしようとしているのかが曖昧なまま授業が進ん

でしまったりすることがある。そのため、論理的な思考力や表現する能力の育成、また図形概念や性質を理解することが十分でないことがある。

#### (2) 研究の目的

本研究では、中学校第2学年数学の二等辺三角形の性質に関わる学習において、作図をスタートにして考えることによって、仮定を実感しながら証明が進められることを明らかにする。

#### (3) 研究の方法

- ① 先行の文献や研究の分析・考察
- ② 筆者のこれまでの授業実践の省察
- ③ 本研究のまとめ(到達点と今後の課題)

### 2 先行研究の分析・考察

最初に現行の教科書および学習指導要領における二等辺三角形の取り扱いについて概観する。次に特に数学における「逆」に関わって整理する。さらに作図に関わる先行研究について考察する。

#### (1) 二等辺三角形の取り扱いについて

教科書における二等辺三角形の定義について、現行の教科書(7社)ではいずれも「2辺が等しい三角形を二等辺三角形という」とされている。この定義に基づき、「二等辺三角形の2つの底角は等しい」、「二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に二等分する」という二等辺三角形の性質(定理)を証明により確かめていく。その後、逆の見方となる「ある三角形が二等辺三角形であると言える条件」について考えていくが、教科書により表現の違いがあるものの「2つの角が等しい三角形」であることとしている。

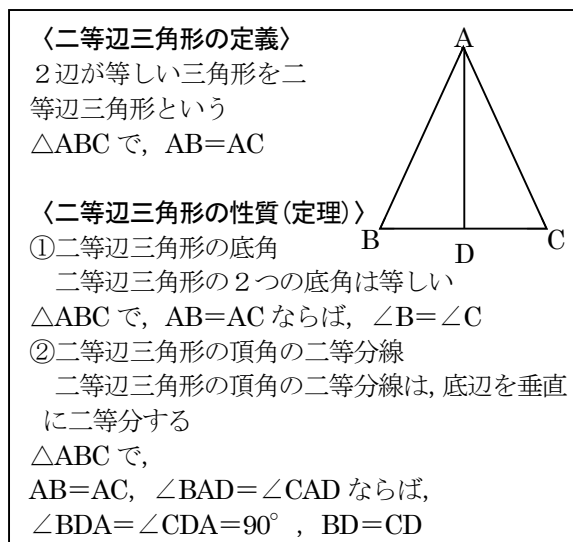


図1. 二等辺三角形の定義と性質(定理)

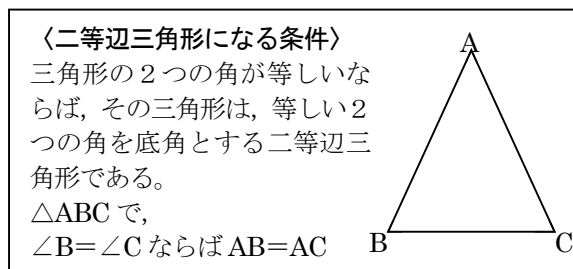


図2. 二等辺三角形になる条件

二等辺三角形の性質については、小学校第3学年で、図形の角や辺に着目し、実験、実測、観察によって調べてきている。学習指導要領解説(p.93)には、それを踏まえて「中学校第2学年では、論理的に筋道を立てて推論することによって、図形の性質を調べることができるようにする。さらに、調べる過程やその結果について説明し伝え合う活動を通して、適切に表現できるようにすることが重要なねらいである。」と記述されている。このことから、図形の性質を理解するとともに、図形の性質を演繹的に確かめ、論理的に考察し表現する能力を養うことが大きなねらいであると言える。そのため、いわゆる「証明する」ということに力点を置いた学習が行われる。証明の際には根拠を明らかにすることが必要であるため、用いて良い条件となる「仮定」を明確にしておくことが重要であると言える。

## (2)「逆」を扱う意義について

数学における「逆」とは、ある命題A「○○について、△△ならば■●である」に対して、その前件(仮定)と後件(結論)を入れ替えた命題B「○○について、■●ならば△△である」を指す。

このとき、○○は命題についての前提条件である。もとの命題が正しくてもその逆が必ず正しいとは言えない。(図3)

- ① 整数  $a$ 、 $b$  で、  
 $a$  も  $b$  も奇数ならば、 $a+b$  は偶数である  
 (仮定) (結論)  
**【 $a$ 、 $b$  の値によらずいつでも成り立つ→正しい】**
- ② 整数  $a$ 、 $b$  で、  
 $a+b$  が偶数ならば、 $a$  も  $b$  も奇数である  
 (仮定) (結論)  
**【 $a=2$ 、 $b=6$  のように共に偶数の場合が考えられる→正しくない】**

図3. 「逆」が正しくない例

本研究においては、三角形について「二等辺三角形の2つの底角は等しい」という二等辺三角形の性質を示す命題をもとの命題とすると「2つの角が等しい三角形は二等辺三角形である」という二等辺三角形になる条件を示す命題が「逆(逆命題)」となる。この2つの命題はどちらも成り立つが、図3の例のように成り立たないものもある。

逆命題を考える意義として、庄司(2008)は、新しい命題の発見や解答に対して生徒自身が価値づけを行えるということを挙げている。

鈴木(1994)は、逆の問題をつくる活動の意義として、論理的な思考力を育てる場を与えることができることや、思考実験を行う場面を子どもたちにとって自然な形で与えることができることなどを挙げている。

このことから、ある命題の逆について考えることは、数学的な見方や考え方を育てることにつながると考える。逆命題は図形領域以外でも扱うことのできる内容であり、逆命題とその内容の正誤を考えることは、高等学校における必要十分条件の学習の素地にもなる。したがって、生徒は本研究で取り上げる二等辺三角形の底角の性質を理解するだけにとどまらず、「逆」という見方そのものについて理解することも重要であると言える。

## (3)作図を基にする効果について

ある図形について学習する際には、教科書等に表示されている図や生徒が条件に合わせて作図したものを用いて、視覚的に明らかにした上で考察することが多い。教科書等に取り上げられている問題の内容は出版社による大きな違いは無く、生徒が触れる問題は決まったものになりがちである。

中学校で証明問題としてよく扱われる問題だけを与え続ける問題点として、鈴木(1994)は次の3つのことを挙げている。

- ①仮定から正確に作図することで結論が視覚的に明らかになり、証明の必要感をもたない。
- ②問題は子供以外の教科書などから提示されるので、「結果は当然成り立つ」ことであって子供が証明しようという意欲に欠ける。
- ③仮定と結論を明確にする必要性を感じない。

このように、生徒に必要感を持たせられないことや生徒の意欲の低下は、多くの教師が実感していると思われる。また作図については、①の指摘の通り作図が完成することにより視覚的に明らかになるという問題点の他に、作業に時間がかかるというデメリットもある。

これらの問題の解決に、結論を示さず生徒に作図させることが有効であると次の理由から考えた。

- ア. 作図の途中や完了した際に、生徒が自ら特徴を見出すことができる。
- イ. 生徒自身が見出した特徴であるため、証明する必要性が生じ、証明しようとする意欲が高まることが期待できる。
- ウ. 作図の際に用いた条件を、証明する際に仮定として意識しやすくなる。

上記のように作図を行う目的を、作図を通して特徴を見出すことや作図の過程を振り返りながら証明を行うことに定めれば、鈴木(1994)が指摘する問題点を解決しようとする。作業時間がかかるという問題点の解消には至らないが、作図に時間がかかっても作図を取り入れる価値は十分にあると考える。

以上(1)(2)(3)をまとめると、次のことが言える。

- ・二等辺三角形の性質を証明する際に、「仮定」を明確にすることが重要である。
- ・「逆命題」とその正誤を考えることを通して、二等辺三角形の底角の性質の理解を深めることとともに高等学校の学習の素地となる見方を養うことができる。
- ・作業に時間がかかっても、結論を示さず生徒自身に作図を行わせることは有効である。

### 3 実践と結果

これまでの筆者の授業実践を学習内容ごとに振り返ると概ね以下ようになる。

#### (1) 二等辺三角形の定義と性質を確認する学習

小学校で既に二等辺三角形の辺や角についての学習が行われているという前提に立ち、2つ折りした折り紙から二等辺三角形を切り出す活動を取り入れながら性質の確認を行う。その上で「頂角、底角、底辺」などの用語や二等辺三角形の定義となる性質を確認する。

折り紙を用いて考える活動では「自分の三角形」から分かることを探したり発表したりすることに生徒は積極的な姿勢を示した。

#### (2) 二等辺三角形の性質を証明する学習

図形の性質を演繹的に確かめ、論理的に考察し表現する能力を養うことを大きなねらいとし、証明を完成させることに主眼を置く。そのため例えば「二等辺三角形の2つの底角は等しい」ことを証明する際には、2つ折りした折り紙を基にし、等しい辺や角に印をつけて2つに分けられた三角形が合同となることを確認するステップを踏み、証明の見通しを持たせる。

見通しを持つことにより、苦手意識が強い生徒も証明することに取り組みやすくなる半面、多くの生徒は証明を完成させることが目標となり、内容への意識は小さくなっている。

#### (3) 二等辺三角形になる条件を考え証明する学習と「逆」の見方を確認する学習

「三角形の2つの角が等しいならば、その三角形は二等辺三角形である」ことを見出させ、証明によって確かめると共に、(2)で確認した「二等辺三角形の2つの底角は等しい」の性質と比較し「逆」という見方を示す。

「二等辺三角形の2つの底角は等しい」という性質と仮定と結論が入れ替わっていることを区別できず、内容の意味理解が不十分な生徒がいる。また仮定と結論を混同し、証明が単なる記号の羅列となる生徒もいた。

「逆」の理解については、仮定と結論を入れ替えたものとして形式的な理解に留まる生徒が多いと感じている。

### 4 考察

3の筆者のこれまでの実践を2の分析・考察に照らして考え、以下のような結論に至った。

#### (1) 作図を学習のスタートにすることについて

3(1)で述べた折り紙を用いたことについて、生徒は自分が作ったものを基にして考えることに積極的な態度を示した。このことから作図について

も、生徒自身の手で行いそれを基にして学習を展開することは意欲の向上につながると考える。

3 (3) で述べた二等辺三角形になる条件を考える学習について、証明したことがらの内容の理解は満足ではない原因を考える。大きな要因は生徒に考えさせたい性質を、筆者が図と共にその時間に解決する問題として提示しているためと考える。問題が生徒の思考からもたらされたものではない上に、提示された図から生徒は「二等辺三角形である」と視覚的に判断できてしまう。そのため証明によって明らかにする必要感を生徒は持てなくなる。また、提示された図からは仮定と結論を区別することができず、二等辺三角形であることを前提として考える生徒もいる。

この問題の解決にも、作図を取り入れることが有効ではないかと考える。2 (3) で述べたように、結論を示さず生徒に作図を行わせることによって、生徒自身が特徴を見出すことや証明の際に仮定が捉えやすくなることが期待できる。その結果、意欲の高まりや「二等辺三角形の2つの底角は等しい」と「三角形の2つの角が等しいならば、その三角形は二等辺三角形である」ことが逆の関係であることにも気づきやすくなると考える。

#### (2) 「逆」の学習について

これまでの実践では、二等辺三角形の性質を例にして教師の主導により「逆」という考え方を示していた。しかし、上述したように生徒自身が「逆」の関係であることに気付くことによって、「逆」の考え方の理解は内容に基づいたものとなることが期待される。その上で数に関する命題を取り上げて「逆」の理解を深めたり、二等辺三角形と正三角形の包含関係を考察させる中で図形の性質の理解を深めたりすることが可能であると考え。

## 5 到達点と課題

### (1) 到達点

4 の考察などを踏まえ、課題改善に向けて以下のような授業を計画した。

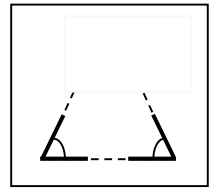
#### ①生徒の作図を基にして図形の特徴を考察する

生徒が自ら作図を行う効果として、生徒の主体性の向上と作図の際に用いた条件を仮定として意識しやすくなる点などを述べてきた。そこで、次の2つの学習において作図を取り入れる。

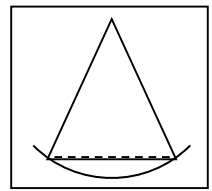
ア. 二等辺三角形の定義を確認する学習

イ. 二等辺三角形になる条件を見出す学習

イについて先に述べる。これは4の考察(1)で述べた内容の具現化したものである。2つの等しい角をつくらせる。それを右図のように一直線上に並べて三角形となるようにする。この操作を通して、出来上がる三角形は二等辺三角形であることを見出させる。その上で、二等辺三角形であることを証明によって明らかにする必要性を高め、仮定を意識しながら証明が行えるようにする。



アについて、定義を示す前に作図によって生徒に二等辺三角形を描かせる。その際、生徒は右図のように円の半径を2つ結んで三角形を描くことが予想される。この作図の方法から「2辺が等しい三角形を二等辺三角形という」とする定義を生徒は実感できると考える。またこの活動経験により、イの学習の際に仮定を意識しやすくするねらいもある。



#### ②内容の考察により「逆」の理解を促す

上述①の作図を基にした学習により図形の性質の理解が深まれば、その仮定と結論に着目させることで「逆」という見方について、形式ではなく内容に着目させて理解を促すことができると考える。その上で様々な命題について逆命題やその正誤を考えさせることにより、図形の性質を再確認したり「逆」の考え方を図形領域以外に広げて内容に着目して思考したりすると考える。

#### (2) 今後の課題

現時点では、これまでの実践を検証して問題点を明らかにし、改善策を検討した段階である。

今後の実践により、その有効性を検証していく。

## 引用文献

- 文部科学省(2008)『中学校学習指導要領解説 数学編』, 教育出版.
- 庄司貞夫(2008),「中等教育数学科における図形の論証指導に関する研究—定理の「逆命題」を考えることを通して—」,『第41回数学教育論文発表会論文集』, pp. 531-536.
- 鈴木誠(1994),「中学校数学科における「逆」の問題づくりに関する研究—オープンエンドアプローチを取り入れた指導を通して—」,『日本数学教育学会誌』, 76 巻第 7 号, pp. 167-174.